Teorema di Hahn-Banach

Alessandra Albanese e Sara Lamboglia
12.03.2012

1 $\diamondsuit$ Teorema di Hahn-Banach

Teorema 1.1 (Hahn-Banach)**.** *Se M é un sottospazio di uno spazio vettoriale normato X e f é un funzionale lineare limitato su M , f puó essere esteso a un fuzionale lineare limitato F su X tale che $||F|| = ||f||$.*

Prima di procedere con la dimostrazione del teorema richiamiamo alcune nozioni necessarie.

Definizione 1.2. *Una fuzione F si dice una estensione di f se il dominio di F include quello di f e $F(x) = f(x)$ per ogni x appartenente al dominio di f.*

Definizione 1.3. *Una funzione $\psi : V \to K$ con V $K-$spazio vettoriale si dice un funzionale lineare se vale:*

$$\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y) \ \ e \ \ \psi(\alpha x) = \alpha\psi(x) \qquad \forall x, y \in V, \forall \alpha \in K$$

Definizione 1.4. *Sia $f : M \to \mathbb{R}$, e $F : X \to \mathbb{R}$ definiamo*

$$||f|| = sup\left\{\frac{|f(x)|}{||x||} : x \in M \setminus \{0\}\right\} \ e \ ||F|| = sup\left\{\frac{|f(x)|}{||x||} : x \in X \setminus \{0\}\right\}$$

Lemma 1.5. *Sia V uno spazio vettoriale complesso:*

1. *Se u é la parte reale di un funzionale lineare complesso f su V*

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \tag{1}$$

2. *Se u é un funzionale lineare su V e se f é definita dalla (1), f é un funzionale lineare complesso su V.*

3. *Se V é un spazio lineare normato e se f e u sono legati dalla (1), risulta $||f|| = ||u||$*

Dimostrazione. 1.5

1. Siano α e β numeri reali e $z = \alpha + i\beta$, la parte reale di iz é $-\beta$. Quindi

$$z = Re(z) - iRe(iz) \tag{2}$$

da questa identitá ricaviamo che

$$f(x) = Re(f(x)) - iRe(f(ix)) = u(x) - iu(ix) \tag{3}$$

2. Essendo u lineare si ha che
$f(x+y) = u(x+y)-iu(ix+iy) = u(x)+u(y)-i(u(ix)+u(iy)) = f(x)+f(y)$
e $f(\alpha x) = \alpha f(x)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,
inoltre $f(ix) = u(ix) - iu(-x) = u(ix) + iu(x) = if(x)$ quindi f risulta anche lineare complesso.

3. Poiché $|u(x)| \leq |f(x)|$, $||u|| \leq ||f||$. D'altra parte $\forall x \in V$ possiamo trovare un numero complesso α con $|\alpha| = 1$ tale che $\alpha f(x) = |f(x)|$. Di conseguenza

$$|f(x)| = f(\alpha x) = u(\alpha x) \leq ||u|| \cdot ||\alpha x|| = ||u|| \cdot ||x||$$

e quindi $||f|| \leq ||u||$.

□

Dimostrazione. 1.1

Dimostreremo in primo luogo il teorema nel caso di uno spazio vettoriale reale e di un funzionale reale, nella parte finale prenderemo in considerazione il caso complesso.
Se $||f|| = 0$, l'estensione richiesta é $F = 0$.
Escludendo questo caso possiamo supporre $||f|| = 1$.
Sia $x_0 \in X$ e $x_0 \notin M$ e sia M_1 lo spazio vettoriale definito in questo modo:

$$M_1 = \{x + \lambda x_0 : x \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Definendo $f_1(x + \lambda x_0) = f(x) + \lambda\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ fissato abbiamo che f_1 é un funzionale lineare su M_1 che estende f. Dobbiamo ora assicurarci che il funzionale trovato abbia norma 1, cioé verifichi:

$$||f_1|| = sup\left\{\frac{|f_1(x)|}{||x||} : x \in M_1\right\} = 1$$

sicuramente $||f_1|| \geq 1$ poiché il *sup* di f in M é 1,
dimostriamo ora che $||f_1|| \leq 1$, cioé che :

$$|f(x) + \lambda\alpha| \leq ||x + \lambda x_0||\ \forall x \in M \quad e \quad \lambda \in \mathbb{R} \tag{4}$$

Sostituendo a x, $-\lambda x$ e dividendo entrambi i membri di (4) per $|\lambda|$, risulta:

$$|f(x) - \alpha| \leq \|x - x_0\| \qquad \forall x \in \mathbb{R} \tag{5}$$

Siano ora $A_x = f(x) - \|x - x_0\|$ e $B_x = f(x) + \|x - x_0\|$. Si ha che $A_x \leq \alpha \leq B_x$.
Affinché un tale α esista gli intervalli $[A_x, B_x]$ devono avere almeno un punto in comune, cioé se e soltanto se $A_x \leq B_y$ per tutti gli x e y in M.
Essendo

$$f(x) - f(y) = f(x - y) \leq \|x - y\| \leq \|x - x_0\| + \|y - x_0\|$$

(Per linearitá e perché $\|f\|$=1)
Si ha che

$$A_x = f(x) - \|x - x_0\| \leq f(y) + \|y - x_0\| = B_y$$

Abbiamo in questo modo dimostrato l'esistenza di un'estensione di f nel sottospazio M_1 che conserva la norma.
Sia ora $\mathcal{P}$ l'insieme di tutte le coppie (M', f') dove M' é un sottospazio di X contenente M e f' é un'estensione lineare reale di f a M'.
Ordiniamo parzialmente $\mathcal{P}$ con la seguente relazione $(M', f') \leq (M'', f'')$ se $M' \subset M''$ e $f''(x) = f'(x)\ \forall x \in M'$.
Notiamo che l'ordinamento é ben definito perché sono verificate le proprietá riflessiva, antisimetrica e transitiva.
Inoltre l'insieme $\mathcal{P}$ non é vuoto poiché contiene (M_1, f_1) per quanto dimostrato nella prima parte.
Ricordiamo

Lemma 1.6 (Principio di massimalitá di Hausdorff)**.** *Ogni insieme parzialmente ordinato non vuoto contiene un sottoinsieme massimale totalmente ordinato.*

Quindi per il principio di massimalitá di Hausdorff esiste una sottofamiglia massimale Ω di $\mathcal{P}$ totalmente ordinata.
Sia Φ la famiglia di tutti gli M' tali che $(M', f') \in \Omega$.
Φ é totalmente ordinato (per inclusione) e di conseguenza l'unione $\tilde{M}$ di tutti gli elementi di Φ, che é l'insieme massimale, é un sottospazio di X.
Se $x \in \tilde{M}$ risulta che $x \in M'$ per qualche $M' \in \Phi$. Definiamo $F(x) = f'(x)$ dove f' é l'estensione lineare che compare nella coppia $(M', f') \in \Omega$.
Notiamo che la costruzione degli M' fa si che la definizione di F non dipenda dalla particolare f' che si sceglie purché M' contenga x.
La F definita come sopra é un funzionale lineare di norma 1.
Se $\tilde{M}$ é un sottospazio proprio di X con lo stesso procedimento visto all'inizio potremmo costruire un'ulteriore estensione di F e questo sarebbe in contraddizione con la massimalitá di Ω.
Quindi $\tilde{M} = X$ e la dimostrazione é completa nel caso reale.

Sia ora f un funzionale lineare complesso sul sottospazio M dello spazio vettoriale complesso normato X, e sia u la parte reale di tale funzionale.
Applichiamo il teorema appena dimostrato estendendo u a un funzionale lineare U su tutto X, con $\|U\| = \|u\|$ e poniamo per definizione $F(x) = U(x) - iU(ix) \quad x \in X$. Per il lemma dimostrato prima F é un estensione lineare complessa di f e si ha che $\|F\| = \|U\| = \|u\| = \|f\|$ □

2 ♢ Alcune conseguenze del teorema di Hahn-Banach

Teorema 2.1. *Sia M un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale normato X e sia $x_0 \in X$. Il punto x_0 appartiene alla chiusura $\overline{M}$ di M se e soltanto se non vi é alcun funzionale limitato f su X tale che $f(x) = 0\ \forall x \in M$ ma $f(x_0) \neq 0$.*

Dimostrazione. 2.1
Sia $x_0 \in \overline{M}$ se f é un funzionale lineare limitato su x e $f(x) = 0$ risulta anche per la continuitá di f, $f(x_0) = 0$.
D'altra parte se $x_0 \notin \overline{M}$, esiste allora un $\delta > 0$ tale che $||x - x_0|| > \delta\ \ \forall x \in M$.

Sia $M' = \{x + \lambda x_0 | x \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}$ e definiamo $f(x + \lambda x_0) = \lambda$.
Essendo:

$$\delta|\lambda| \leq |\lambda| \; ||x_0 + \lambda^{-1}x|| = ||\lambda x_0 + x||$$

si ha che f é un funzionale lineare su M' la cui norma é al piú δ^{-1}, infatti

$$||f|| = sup\left\{\frac{|f(x + \lambda x_0)|}{||x + \lambda x_0||}, x \in M \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\frac{|f(x + \lambda x_0)|}{||x + \lambda x_0||} = \frac{|\lambda|}{||x + \lambda x_0||} < \delta^{-1}$$

Inoltre si vede che $f(x) = 0$ su M e $f(x_0) = 1$.
Quindi per il teorema di Hahn-Banach si puó estendere f da M' a X e dunque si ottiene un funzionale limitato f su X tale che $f(x) = 0$ per tutti gli $x \in M$ e $f(x_0) \neq 0$. □

Teorema 2.2. *Se X é uno spazio lineare normato e $x_0 \in X$, $x_0 \neq 0$, esiste un funzionale lineare limitato f su X di norma 1 tale che $f(x_0) = ||x_0||$.*

Dimostrazione. Sia $M = \{\lambda x_0\}$, e poniamo, per definizione, $f(\lambda x_0) = \lambda||x_0||$. Di conseguenza f é un funzionale lineare di norma 1 su M, e applicando il teorema di Hahn-Banach si puó estendere f a tutto lo spazio X. □

Osservazione 2.3. *Se X é uno spazio lineare normato, e X' é la famiglia di tutti i funzionali lineari limitati su X, definendo in modo naturale l'addizione tra due funzionali e la moltiplicazione per uno scalare si osserva che X' é ancora uno spazio vettoriale normato. Esso é anzi uno spazio di Banach. Tale spazio viene chiamato spazio duale topologico cioé lo spazio delle forme lineari continue su X.*

Osservazione 2.4. *Una delle conseguenze di 2.2 é che X^* non é lo spazio vettoriale banale se X non é banale. Di fatto X^* separa i punti di X. Questo significa che, se $x_1 \neq x_2$ in X, esiste un $f \in X^*$ tale che $f(x_1) \neq f(x_2)$. Per provare questo basta prendere nel teorema 2.2 $x_0 = x_2 - x_1$. Infatti si avrebbe che $f(x_1 - x_2) = ||x_1 - x_2||$, d'altra parte $f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) = ||x_1 - x_2||$ quindi essendo $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Osservazione 2.5. *Un'altra conseguenza di 2.2 é che , per $x \in X$*

$$||x|| = \sup\{|f(x)| : f \in X^*, ||f|| = 1\} \tag{6}$$

3 $\diamondsuit$ Separazioni di insiemi convessi

Teorema 3.1 (Formula generale di Hahn-Banach)**.** *Sia X uno spazio vettoriale e sia $p : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione verificante:*

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \forall \in X \quad \forall \lambda > 0$

(ii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

Sia inoltre $G \subset X$ un sottospazio vettoriale e sia $g : G \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che

$$g(x) \le p(x) \ \ \forall x \in G$$

allora esiste un funzionale lineare f definito su X che prolunga g tale che:

$$f(x) \le p(x) \quad \forall x \in X$$

Osservazione 3.2. *Notiamo che il funzionale lineare p presente nel teorema non é una norma perché non é detto che sia positiva e inoltre verifica l'omogeneitá solo per $\lambda > 0$ e non $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.*

Definizione 3.3. *Un iperpiano affine é un insieme della forma*

$$H = \{x \in X; f(x) = a\}$$

dove f é una forma lineare su X non identicamente nulla e $a \in \mathbb{R}$

Lemma 3.4. *L'iperpiano di equazione $f(x) = a$ é chiuso se e solo se f é continua.*

Dimostrazione. Sia $H = \{f(x) = a\}$. Se f é continua allora H é chiuso.
Sia H chiuso allora prendendo $x_0 \in H^c$(che é aperto) si supponga, senza perdita di generalitá, $f(x_0) < a$. Sia $r > 0$ tale che $B_r(x_0) \subset H^c$ allora $f(x) < a \ \ \forall x \in B_r(x_0)$ (se supponiamo $f(x_1) > a \ \ x_1 \in B_r(x_0)$ il segmento $\{x_t = (1-t)x_0 + tx_1 \quad 0 \le t \le 1\}$ é in $B_r(x_0)$ dunque $f(x_t) \ne a$ ma scegliendo $t = \frac{f(x_1)-a}{f(x_1)-f(x_0)}$ si trova $f(x_t) = a$ e questo é assurdo). Dunque $f(x_0 + rz) < a \quad \forall z \in B_1(0)$. Quindi f é continua. □

Definizione 3.5. *Siano $A \subset X$ e $B \subset X$.*
*Diciamo che l'iperpiano H di equazione $f(x) = a$ **separa** A **e** B **in senso largo** se risulta*

$$f(x) \le a \, \forall x \in A \ \text{ e } f(x) \ge a \, \forall x \in B$$

*Diciamo che l'iperpiano H di equazione $f(x) = a$ **separa** A **e** B **in senso stretto** se esiste $\epsilon \ge 0$ tale che*

$$f(x) \le a - \epsilon \, \forall x \in A \ \text{ e } f(x) \ge a + \epsilon \, \forall x \in B$$

Definizione 3.6. *Un insieme $A \subset X$ si dice **convesso** se*

$$tx + (1-t)y \in A \ \ \forall x, y \in A \, \forall t \in [0,1]$$

Definizione 3.7. *Sia $C \in X$ un aperto convesso con $0 \in C$. Sia $p : X \to \mathbb{R}$, definita in questo modo:*

$$p(x) = inf\{a > 0; a^{-1}x \in C\}$$

e diciamo che p é la jauge di C.

Lemma 3.8. *Sia C un insieme aperto convesso non vuoto e sia p la jauge di C, allora p verifica:*

(i) $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in X \quad \forall \lambda > 0$

(ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X$

(iii) *Esiste un* M *tale che* $0 \leq p(x) \leq M||x||$

(iv) $C = \{x \in X;\ \ p(x) < 1\}$

Dimostrazione. 3.8

(i) Deriva dalla definizione di p.

(iii) Si ha che
$$p(x) \leq \frac{1}{r}||x|| \ \ con \ \ r > 0 \ \ tale \ \ che \ \ B_r(0)$$
infatti $\frac{x}{||x||}r$ ha norma r e dunque é in C. Da ció si ricava la (iii).

(iv) Supponiamo che $x \in C$ allora poiché C é aperto $(1+\varepsilon)x \in C$ per ε abbastanza piccolo. Quindi $p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$. D'altra parte se $p(x) < 1$ allora esiste $0 < a < 1$ tale che $a^{-1}x \in C$ e quindi essendo C convesso si ha che $a(a^{-1}x) + (1-a)0 = x \ \in C$

(ii) Siano $x, y \in X$ e sia $\varepsilon > 0$. Per i punti precedenti $\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C$ e$\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ quindi $\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\varepsilon} \in C$ per $0 < t < 1$. In particolare per $t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}$ si ottiene $\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$ e grazie ai punti precedenti $p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon$.

□

Lemma 3.9. *Sia* $C \in X$ *un convesso aperto non vuoto e sia* $x_0 \in X$ *con* $x_0 \notin C$ *allora esiste* $f \in X'$ *continua tale che* $f(x) < f(x_0) \quad \forall x \in C$. *In particolare l'iperpiano d'equazione* $f = f(x_0)$ *separa* $\{x_0\}$ *e* C *in senso largo.*

Teorema 3.10 (Hahn-Banach, prima forma geometrica)**.** *Siano* $A \subset X$ *e* $B \subset X$ *due insiemi convessi, non vuoti e disgiunti. Supponiamo che* A *sia aperto. Allora esiste un iperpiano chiuso che separa* A *e* B *in senso largo.*

Dimostrazione. 3.10

Poniamo
$$C = \bigcup_{y \in B} A - y$$
osserviamo che C é convesso. Infatti sia $t \in \mathbb{R}$, allora
$$t(x-y) + (1-t)(x_1 - y_1) = tx + (1-t)x_1 - (ty - (1-y)y_1)$$
e
$$tx + (1-t)x_1 \in A \quad e \quad (ty - (1-y)y_1) \in B$$
Inoltre C é aperto in quanto é unione di traslati di un aperto. $0 \notin C$ in quanto $A \cap B = \emptyset$. Per il lemma 3.9 esiste $f \in X'$ tale che $f(z) < 0 \quad \forall z \in C$ cioé
$$f(x) < f(y) \quad \forall x \in A \qquad \forall y \in B$$
Fissando $a \in \mathbb{R}$ con
$$\sup_{x \in A} f(x) \leq a \leq \inf_{y \in B} f(y)$$
e dunque l'iperpiano $\{f = a\}$ separa in senso largo A e B □

Teorema 3.11 (Hahn-Banach, seconda forma geometrica)**.** *Siano $A \subset X$ e $B \subset E$ due insiemi convessi non vuoti e disgiunti. Si supponga che A é chiuso e B é compatto, allora esiste un iperpiano chiuso che separa A e B in senso stretto.*

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$, ponendo $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$ e $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$,si osserva che A_ε e B_ε sono convessi, aperti e non vuoti.
Inoltre per ε abbastanza piccolo A_ε e B_ε sono disgiunti.
Altrimenti si possono trovare delle successioni ε_n che tendono a 0 e $x_n \in A$ e $y_n \in B$ tali che $||x_n - y_n|| < 2\varepsilon_n$ e dunque estrarne una sottosuccessione y_{n_k} che tende a $y \in A \cap B$, in quanto B é compatto.
Per il teorema 3.10 esiste un iperpiano chiuso di equazione $f = a$ che separa A_ε e B_ε in senso largo.
Si ha dunque

$$f(x + \varepsilon z) \leq a \leq f(y + \varepsilon z) \; \forall x \in A \; \forall y \in B \; \forall z \in B_1(0)$$

quindi risulta che

$$f(x) + \varepsilon ||f|| \leq a \leq f(y) - \varepsilon ||f|| \; \forall x \in A \; \forall y \in B$$

si conclude che A e B sono separati in senso stretto dall'iperpiano $f = a$ poiché $||f|| \neq 0$. □

Corollario 3.11.1. *Sia $F \subset X$ un sottospazio vettoriale tale che $\overline{F} \neq X$ allora esiste un $f \in X'$, $f \neq 0$ tale che*

$$f(x) = 0 \; \forall x \in F$$

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ $x_o \notin \overline{F}$ applicando il teorema 3.11 con $A = \overline{F}$ e $B = \{x_0\}$, esiste dunque $f \in X'$ con $f \neq 0$ tale che l'iperpiano di equazione $f = a$ separa in senso stretto $\overline{F}$ e $\{x_0\}$. Si ha che

$$f(x) \leq a \leq f(x_0) \; \forall x \in F$$

da cui risulta che $f(x) = 0 \; \forall x \in F$. Infatti poiché $\lambda f(x) \leq a \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$, se fosse $f(x) \neq 0$ si avrebbe che preso $\lambda \geq \frac{a}{f(x)}$ si contraddirebbe la disuguaglianza. □